Aufgabenkatalog Algebra – Sommersemester 2019
Aufgaben zum Thema **Darstellungsmatrizen und Lineare Gleichungssysteme**
Dr. Anton Malevich, Leonard Bechtel, Julian Maas

Aufgabe 1 (2)
Berechnen Sie bezüglich der folgenden linearen Abbildungen $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die entsprechenden Darstellungsmatrizen $M := {}_BA_B$ bezüglich der kanonischen Basis des $\mathbb{R}^3$:

a) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x+3y \\ 4x-z \\ x+y-z \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x+3y \\ 4x-z \\ x-y-2z \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 2x-4y+z \\ 0 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x-y \\ 2x-2y \\ 2x+2z \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -x+5y+4z \\ x+y-3z \\ -2x-4y+4z \end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3x-y \end{pmatrix}$

Aufgabe 2 (1)
Berechnen Sie die Darstellungsmatrix folgender Abbildung wie in Aufgabe 1, wobei $a_{ij} \in \mathbb{R}, 1 \leq i, j \leq 3$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3 (1)
Bestimmen Sie für die Abbildungen aus Aufgabe 1 jeweils Kern A, indem Sie für $v \in \mathbb{R}^3$ das LGS $M \cdot v = 0$ lösen. Bei welchen Abbildungen handelt es sich um Automorphismen?

Aufgabe 4 (1)
Lösen Sie das LGS $M \cdot v = b$ für alle Abbildungen aus Aufgabe 1 und folgende $b \in \mathbb{R}^3$:

a) $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ b) $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ c) $b = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Wie hängen Lösungsmenge und Dimension des Kerns zusammen?

Aufgabe 5 (2)
Gegeben seien die beiden o-Basen des $\mathbb{R}^3$:

$$B_1 = [\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}], \quad B_2 = [\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}]$$

Berechnen Sie nun $\tilde{M} = {}_{B_2}A_{B_1}$ bezüglich der Abbildungen aus Aufgabe 1.

Aufgabe 6 (1)
Gegeben seien die o-Basis B und C des $\mathbb{R}^2$ bzw. des $\mathbb{R}^3$:

$$B = [\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}], \quad C = \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right]$$

Berechnen Sie für die folgenden linearen Abbildungen jeweils die Darstellungsmatrizen bezüglich der beiden o-Basen B und C:

a) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 4x+y \\ 2y \\ x-y \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x+y \\ 2x+4y-2z \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 2x+3z \\ 0 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x-3y \\ -2x+6y \\ 4x \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x+2y+z \\ x-y-4z \end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x-y \\ 0 \\ 4x-2y \end{pmatrix}$

Wie hängen die Dimension von Definitions- und Zielbereich mit den Maßen der Darstellungsmatrix zusammen?

Aufgabe 7 (2)
Beim Differenzieren handelt es sich um eine lineare Abbildung. Stellen Sie also für die folgenden Abbildungen jeweils die Darstellungsmatrix für das Differenzieren $D = {}_{B_2}(\frac{d}{dx})_{B_1}$ auf:

a) $\frac{d}{dx} : \mathbb{P}_{n\leq 3} \to \mathbb{P}_{n\leq 2}$, mit $B_1 = [1, x, x^2, x^3]$ und $B_2 = [1, x, x^2]$

b) $\frac{d}{dx} : V \to V$, mit $B_1 = [\sin x, \cos x]$ und $B_2 = [\sin x, \cos x]$

c) $\frac{d}{dx} : \mathbb{P}_{n\leq 3} \to \mathbb{P}_{n\leq 2}$, mit $B_1 = [1, x, x^2, x^3]$ und $B_2 = [1, x, x^2]$